韓國經營科學會誌
第26卷 第4號
2001年 12月

AHP에서의 응답일관성 모수의 통계적 특성과 활용 방안

고길곤* · 이경전**

Statistical Characteristics of Response Consistency Parameters in Analytic Hierarchy Process

Kil Kon Ko* · Kyoung Jun Lee**

■ Abstract ■

Using the computer simulation method, we investigate the probability distribution of maximum eigenvalue of pairwise comparison matrix, which has been used as a parameter for measuring the consistency of responses in analytic hierarchy process (AHP). We show that the shape of the distribution of the maximum eigenvalue is different according to the dimension of the matrix. In addition, we cannot find any evidence that the distribution of the Consistency Index is a Normal distribution, which has been claimed in the previous literature. Accordingly, we suggest using so called K-index calculated based on the concept of cumulative distribution function rather than based on that of arithmetic mean because the probabilistic distribution cannot be assumed to be a Normal distribution. We interpret the simulation results by comparing them with the suggestion of Saaty[11]. Our results show that using Saaty's value could be too generous when the dimension of the matrix is 3 and strict over 4. Finally, we propose new criteria for measuring the response consistency in AHP.

Keyword : AHP, Analytical Hierarchy Process, Consistency Index, Response Consistency

논문접수일 : 2001년 8월 20일　　논문게재확정일 : 2001년 11월 23일
* 한국개발연구원
** 한국과학기술원 산업공학과

1. 서 론

Saaty가 1980년 저서 'The Analytic Hierarchy Process'를 발간한 이래 AHP(Analytic Hierarchy Process) 분석에 관한 체계적인 연구가 널리 수행되기 시작하였다. 국내의 경우에도 한국경영과학회지에서 42편 이상의 논문이 AHP 기법을 활용하고 있으며1), 행정학분야[2]를 비롯하여 각종 사회과학분야에서 널리 활용되기 시작하였다. 뿐만 아니라 최근에는 각종 공공투자사업의 의사결정을 위한 기법[6]으로도 사용됨으로서 그 사용의 범위가 점차 확대되고 있는 실정이다.

그러나, AHP 기법이 갖고 있는 장점[4]에도 불구하고 다음과 같은 몇 가지 이론적 기초에 대한 연구가 상대적으로 소홀히 되어왔다.

첫째, 고유치(eigenvalue)값이 갖고 있는 분포적 특성에 관한 연구이다. AHP에서는 비음역수행렬(nonnegative reciprocal matrix)형태를 갖는 쌍대비교행렬(pairwise comparison matrix)을 이용하여 최대고유치(maximum eigenvalue : λ_{max})2) 값을 구하고 이를 바탕으로 고유벡터(eigenvector)가 유도되며 이 고유벡터를 정규화(normalization)하여 평가항목간 가중치를 산정하게 된다. 최대고유치값은 행렬의 차원(dimension : n)에 의존을 하게 되는데 차원에 따른 최대고유치의 분포함수에 대한 연구는 그리 많지 않았다. Vargas[13], Forman [7], Saaty[11] 등의 연구에서 차원에 따른 최대고유치의 평균값과 분산값들을 제시하거나 카이제곱분포나 정규분포를 제시하고 있는 연구들이 있으나 표본의 크기가 작아 신뢰성이 떨어지거나 이론적인 오류들이 발견되었다.

둘째, 일관성 지수(Consistency Index : CI)와 일관성비율(Consistency Ratio : CR)의 의미에 대한 것이다. 일반적으로 Saaty의 견해에 따라 일관성지수는 $(\lambda_{max}-n)/(n-1)$의 공식에 따라 구하는데 이 공식이 갖는 의미에 대한 해석과 타당성 여부가 검증되어 있지 못하다. 특히 일관성비율의 경우 0.1 이하 내지는 0.2가 기준으로 제시되고 있으나, 이 기준의 논리적 근거에 대한 논의를 기존의 연구에서 찾아보기 힘들다.

셋째, AHP 기법과 통계적 방법론과의 조화문제이다. 의사결정자들의 응답결과들은 오차를 포함할 수밖에 없으며 따라서 분석결과의 해석에서도 이러한 오차의 정도를 밝혀주는 것이 바람직하다. 예를 들어 대안 A와 대안 B간의 상대적 중요도가 51 : 49로 나타나는 경우 2의 차이가 통계적으로 얼마나 유의미한 값인지에 관한 정보를 제공할 필요가 있다. 그러나 기존의 연구에서는 AHP 결과와 통계적 방법론의 연결고리(linkage)를 제공할 수 있는 이론을 제시하고 있지 못하고 있다.

본 연구에서는 이러한 문제인식을 바탕으로 AHP 기법에서 응답일관성의 측정을 위해 최대고유치의 분포를 행렬의 차원별로 구해보고 그 분포적 특성을 파악하고자 한다. 그리고 이렇게 파악된 분포적 특성을 바탕으로 기존의 Saaty가 제시한 일관성비율과 같은 응답일관성 측정지표의 한계점을 제시하고자 한다. 마지막으로 분석결과를 이용하여 응답일관성 측정을 위한 새로운 방법론을 제시하고자 한다.

이러한 분석수행을 위해 먼저 최대고유치값을 구하기 위해 Mathematica Ver.3.0을 활용하여 행렬식(Determinant)값에 관한 대수식을 구하고 시뮬레이션을 통해 최대고유치의 값들을 계산하였다. 구해진 값들은 SAS Ver. 6.12를 이용하여 통계분석을 수행하였다. 사용된 컴퓨터는 Intel Pentium Ⅲ를 이용하였으며 민감도 분석을 위해서 시뮬레이션에서는 반복횟수를 변화시켜가며 분포의 변화를 살펴보았다.

---

1) 이것은 한국경영과학회에서 제공하는 DataBase 검색을 활용한 결과이다.(http : //society.kordic.re.kr/~kormss/db_search/).

2) Saaty는 최대고유치는 principal eigenvalue라는 표현하고 있다[11].

2. AHP 기법과 최대고유치의 특성

2.1 최대고유치와 응답일관성의 개요

쌍대비교행렬을 A, 가중치벡터를 w라고 할 때

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\ w = [w_1, w_2, \cdots, w_n]^T$$

로 나타내자.

가중치벡터 w를 구하는 식은

$$AW = \lambda_{\max} W \qquad (1)$$

을 통해 유도된다. 식 (1)을 w에 대해 정리하면 식 (2)를 얻는다.

$$(A - \lambda I)w = 0 \text{ 단, 0은 (n×1) 열벡터} \qquad (2)$$

식 (2)는 n개의 선형연립방정식이며 w에 대한 non-trivial 해를 얻기 위해서는 식 (3)이 성립하여야 한다.

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad (3)$$

이때 $\lambda_{\max}$ 값의 크기는 행렬 A의 원소(elements)들과 차원(dimension)에 따라 달라지게 된다. 의사결정기법으로서 AHP기법의 장점은 가중치 산정과정에서 응답자들의 응답일관성을 검증할 수 있다는 것이다. 쌍대비교에 의하여 행렬 A를 얻는 방법은 각 열의 요소의 중요도를 1을 기준으로 한 후 대각선 하위에 있는 요소들의 상대적인 중요도를 결정한다. 즉, a_{ii}는 1로 놓고 $a_{(i+1)i}, a_{(i+2)i}, \cdots, a_{ni}$를 먼저 구하고, $a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{(n-1)i}$는 $a_{ji} = 1/a_{ij}$(j=1,2,⋯,i-1)의 관계로부터 얻어진다. 만일 쌍대비교에 의해서 얻어진 행렬 A의 원 a_{ij}가 각각 w_i/w_j의 값을 갖고 있다면 기수적 일관성, 즉, $a_{ij} \times a_{jk} = a_{ik}$가 성립되어야 한다. $a_{ij} \times a_{jk} = a_{ik}$의 의미는 i를 j보다 x배 중요하게 생각하고 j는 k보다 y배 중요하게 생각한다면 i는 k보다 x×y배 중요하게 평가한다는 것이다. 그러나, 실제 응답에 있어서는 이러한 일관성이 완전히 지켜지기 어렵기 때문에 행렬 A의 논리적 일관성 정도를 검증하기 위한 기수적 일관성의 측정이 필요하다. 기수적 일관성은 쌍대비교에 대한 응답이 완전한 일관성을 유지하지 않을 경우

$$\lambda_{\max} > n \qquad (4)$$

의 관계가 성립하는 성질을 이용한다. 쌍대비교의 대상이 되는 요소 j에 대한 요소 i의 상대적 중요도의 추정치 a_{ij}는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$a_{ij} = (1 + \delta_{ij})\, w_i/w_j \qquad (5)$$

단, δ_{ij}는 w_i/w_j에 대한 불일치 정도로 $\delta_{ij} > -1$

이때, 실제 관찰한 쌍대비교행렬에서 구한 최대고유치 $\lambda_{\max}$와 완전한 일관성을 가진 쌍대비교행렬의 최대고유치 n의 차이는 식 (6)으로 표현된다.3)

$$\lambda_{\max} - n = 1/n \sum_{1 \le i < j \le n} \delta_{ij}^2 / (1 + \delta_{ij}) \ge 0 \qquad (6)$$

식 (6)에서 추정치 a_{ij}가 정확히 w_i/w_j에 일치하면, $\delta_{ij} = 0$이 되어 $\lambda_{\max} - n = 0$이 성립함을 알 수 있다. 따라서, $\lambda_{\max}$가 n에 가까울수록 평가자가 쌍대비교시 일관성 있는 판단을 내렸다고 간주할 수 있다. 이러한 성질에 착안하여 응답의 일관성지수(CI : Consistency Index)를 식 (7)로 정의하여 사용한다.

$$CI = \mu = (\lambda_{\max} - n)/(n-1) \qquad (7)$$

한편, 귀무가설 'H0 : $\lambda_{\max} - n = 0$'을 이용하여 쌍대비교에 대한 일관성을 검정할 수 있다. AHP에서는 일관성 검정시 검정통계량 μ를 사용하는 대신 일관성 지수를 평균 무작위지수(RI : Random Index)로 나눈 일관성비율(CR)로 검정한다. 즉, 일

3) 이에 대한 증명은 [6]. pp.218-220. 참고

관성비율을 식 (8)로 정의하여 응답의 일관성을 나타낸다.

$$CR = CI / RI \quad (8)$$

단, CR = 일관성비율
CI = 일관성지수
RI = 무작위지수[4)]

CR이 0의 값을 갖는다는 것은 응답자가 완전한 일관성을 유지하며 쌍대비교를 수행하였음을 의미한다. Saaty는 CR이 0.1 미만이면 쌍대비교는 합리적인 일관성을 갖는 것으로 판단하고, 0.2 이내일 경우 용납할 수 있는 수준의 비일관성을 갖고 있으나, 0.2 이상이면 일관성이 부족한 것으로 재조사가 필요하다고 제안한다[11].

2.2 기존 방법의 문제점

Saaty는 식 (5)의 오차 δ_{ij}가 (-1,1)사이에서 N$(0, \sigma^2)$을 따른다고 가정을 하면 식 (7)의 μ는 카이제곱 분포를 따른다고 주장하였다[11]. 그러나 일반적으로 응답오차가 -1과 1사이로만 나타난다고 볼 수 없다. μ의 분포는 쌍대비교행렬의 차원 n에 의존하며, 한편으로는 최대고유치 λ_{max}에 의존하기 때문에 정확한 μ의 분포를 알기 위해서는 차원에 따라 λ_{max}의 분포함수를 살펴보는 것이 오히려 일반적인 방법이 될 수 있다.

두 번째, RI 값의 문제이다. Saaty가 제시하고 있는 RI 값은 9점척도를 이용하여 표본크기를 100으로 하여 무작위로 만들어낸 역수행렬(reciprocal matrix)의 일관성지수(Consistency Index)값의 평균값을 역수행렬의 차원이 1에서 15까지의 값을 아래 <표 1>과 같이 제시하고 있다.

〈표 1〉 무작위지수(RI : Random Index, Saaty[11])

행렬차원	1	2	3	4	5	6	7	8
R.I	0.00	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41
행렬차원	9	10	11	12	13	14	15	
R.I	1.45	1.49	1.51	1.48	1.56	1.57	1.59	

그러나 차원에 따라 λ_{max}의 분포가 정규분포를 이루지 않는 경우에 100개 표본의 C.I 값의 평균의 의미해석은 제약이 있을 수밖에 없다. 한편 Saaty[10]에 따르면 Forman[7]의 연구[5)]를 받아들여 새로운 RI 값을 제시하기도 하였다. 그러나 이러한 값들은 산술평균에 기반을 한 값들로, 분포형태에 따라서는 통계량으로서 산술평균이 바람직하지 않을 수 있음을 간과한 것이다.

마지막으로, Saaty가 제시하고 있는 응답일관성의 기준으로서의 CR값을 0.1 내지 0.2로 사용하는 것에 관한 신뢰성 문제이다. 집단의사결정에서의 개인별 CR값의 종합과정은 차치하더라도[6)] 개인의 응답일관성의 기준이 왜 0.1이 되어야 하는지 이론적으로 명확히 제시하고 있지 못하고 있다. 이에 대한 연구는 Vargas[13]에 의해서 수행되었으나, 그 연구 결과는 λ_{max}가 정규분포를 따른다는 가정에 기반을 하였을 뿐 아니라 실제 표본의 크기도 500에 불과하여 분석의 엄밀성에서 떨어지고 있다. 국내의 연구에서도 윤재곤[4]을 비롯하여 이창효[5] 등에서도 Saaty의 0.1 기준을 따른다고 제시하고 있으나 엄밀한 근거를 제시하고 있지는 못하다. 또한 서창교 · 박정우[3]에서는 다른 연구자들과 달리 Golden& Wang[8]의 연구결과를 인용하여 G-값

4) 순수하게 무작위로 응답을 했을 경우에 해당하는 CI 값을 구할 수 있는데 이 지수를 무작위지수(RI : Random Index.)라고 한다. 원래 이 값은 Oak Ridge National Laboratory에서 n이 1부터 15까지의 경우에 대해서 표본크기 100으로 하여 평균적인 RI 값을 시뮬레이션을 통해 얻었다. 그러나, 이 결과는 통계적 불안정성이 커서 Wharton School에서 표본수 500개를 이용하여, n이 1부터 11까지에서 계산된 RI를 이용하고 12이상은 Oak Ridge National Laboratory에서 계산된 값을 이용하여 AHP에서 사용되는 RI 값을 최종적으로 구한다. 이 값은 Saaty[11]를 비롯하여 Expert Choice에서도 채택되었다.

5) Forman의 연구에서는 n이 7인 경우까지의 RI값을 제시하였다.

6) 실제로 개인별 CR값을 종합하여 집단전체의 CR값을 구하는 방법에 대한 연구는 거의 이루어지고 있지 못한 실정이다[12].

을 이용한 일관성측정을 시도하였다. G-값을 이용한 일관성측정은 첫 번째 행에 1/9에서 9사이의 임의의 값을 입력한 후 나머지 행에 숫자들을 일정한 알고리듬을 이용하여 입력하여 구한 값이지만 실제로 $n \times n$행렬에서 임의로 응답가능한 $n(n-1)/2$의 모든 경우의 수에서 도출된 확률분포를 사용하는 것은 아니라는 점에서 한계를 지니고 있다.

앞에서 살펴본 바와 같이, 많은 연구들이 다른 의사결정방법들에 비해 AHP 기법이 갖고 있는 장점으로 응답일관성을 확인할 수 있다는 점을 들고 있으면서도[9], 응답일관성에 관한 좀더 구체적인 연구가 수행되고 있지 못하는 점은 AHP가 직면하고 있는 중요한 이론적 공백이라고 할 수 있다.

3. 최대고유치의 분포 계산을 위한 시뮬레이션

3.1 개요

역수행렬의 차원이 3인 경우에 모든 가능한 역수행렬의 수는 $17^3 = 4913$개이며 차원이 각각 4, 5로 증가할수록 그 숫자는 24,137,569개, 2,015,993,900,449개 등으로 무한히 크게 증가를 하게 된다. 즉 차원이 n일 때, 모든 가능한 쌍대비교행렬의 수는 $17^{\frac{n(n-1)}{2}}$의 관계가 성립한다.

뿐만 아니라 연산과정에서도 최대고유치 계산을 위한 행렬식이 4차, 5차등으로 증가함에 따라 연산의 양이 증가를 하게 된다. 본 연구에서는 차원이 3차인 경우에는 최대고유치의 모집단 분포를 구하고, 4차 이상의 경우에는 무작위추출을 통해서 모집단의 분포를 유추하는 방식을 채택하였다. 이때 무작위추출의 결과들의 민감도가 심한 경우에는 표본의 크기를 변동시킬 필요가 있기 때문에 본 연구에서는 표본의 크기를 점차 증가시켜서 그 분포의 안정성 여부를 재검토하였다. 최대고유치를 구하는 방법은 Laplace 전개를 이용하여 연산을 수행할 수 있는데 3차의 경우에는 행렬식에 대한 대수식을 제시하였으나 4차, 5차, 6차,7차의 경우에는 대수식이 지나치게 길기 때문에 제시를 생략하였다. 또한 역수행렬의 차원이 8차 이상인 경우도 분석을 수행할 수 있으나 실제 AHP 분석을 수행하는 경우에 역수행렬이 8차이상인 경우는 드물기 때문에 본 연구에서는 7차원까지만 분석을 하였다. 연산과정의 효율성을 위해서 Mathematica Ver. 3.0을 활용하여 식 (3)의 대수식을 구하였고, 값들을 변화시키면서 식 (3)을 만족시키는 고유치들을 구한 후 이 고유치중 최대값을 구하였다. 주지하다시피, 경우에 따라서는 고유치들이 허수로 나오는 경우가 있다. 이때 실수와 허수의 대소비교가 불가능할 뿐만 아니라 실제 허수는 AHP 분석에서 의미가 없으므로 실수인 고유치들 중에서 최대고유치를 $\lambda_{\max}$값으로 구하였다. 이렇게 최종적으로 구해진 최대고유치 값들에 대하여 SAS. Ver.6.12를 이용하여 통계분석을 수행하였다. 이러한 과정을 3×3 역수행렬을 이용하여 설명하면 다음과 같다.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1/a_1 & 1 & a_3 \\ 1/a_2 & 1/a_3 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

단, $a_i \in \{\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 이 된다. 이때 $|A-\lambda I|$의 대수식은 다음과 같다.

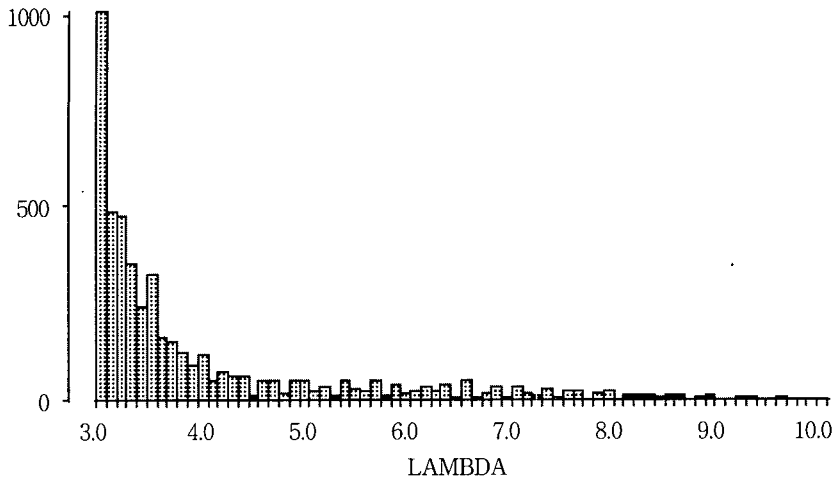
$$|A-\lambda I| = -2 + \frac{a_2}{a_1 a_3} + \frac{a_1 a_3}{a_2} + 3\lambda^2 - \lambda^3 \tag{10}$$

이때 $a_i(\ i \in 1,2,3)$ 값은 1/9에서 9까지 17가지 경우의 수가 있으므로 각각의 모든 가능한 경우의 수를 식 (10)에 대입하여 최대값을 구하면 $\lambda_{\max}$값을 구할 수 있다.

3.2 역수행렬의 차원별 분포적 특성

먼저 $n=3$인 경우의 $\lambda_{\max}$의 분포를 살펴보면 [그림 1]과 같으며, 이 때의 기술 통계량 값은 <표 2>와 같다.

위의 분포는 차원이 3인 모든 가능한 경우의 역수행렬의 최대고유치의 모집단 분포이다. 이 분포



[그림 1] $n=3$일 때 λ_{max}의 모집단분포

〈표 2〉 $n=3$ 일 때 기술통계량 값

표본크기	평균	표준편차	0	1%	5%	10%	25%	50%	75%	100%
4913	4.0489	1.3928	3	3	3.007	3.0291	3.1356	3.4357	4.3333	10.111

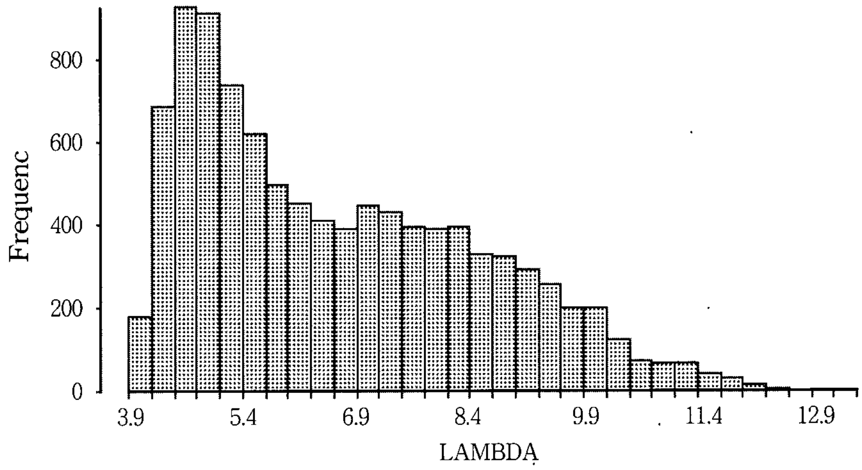
는 앞서 Saaty 가 지적하였듯이 카이제곱 분포를 따른다고 보기는 어렵다. 한편 완전한 응답일관성을 갖추었을 때 $\lambda_{max}=n$이므로 위의 분포의 누적확률을 비일관성의 크기로 해석할 수 있다. 위 분포를 확률질량함수(Probability Mass Function)로 전환하여 Prob($\lambda_{max} \leq k$) = K(단, $k \geq 3$)이라고 할 때 K를 비일관성 측정지표로 이용할 수 있다. Saaty의 일관성비율과 용어를 구분하기 위해 이를 편의상 K지수라고 표현하기로 한다. K지수는 귀무가설 H0 = "응답일관성이 없다"에 대한 유의확률(p-value)에 해당한다. 예를 들어, K지수가 10%일 때 응답일관성이 없다는 가설은 유의수준 10%하에서 기각이 된다.

한편 $n=3$인 경우에 Saaty는 RI 값을 0.58로 제시하고 있으며 이는 무작위로 응답했을 경우 최대고유치의 평균이 $\hat{\lambda}_{max}=4.16$[7]임을 나타낸다. 시뮬레이션의 결과에서 λ_{max}값이 4.16이 되는 경우 K지수가 73.1% 수준에 해당하는 곳으로 이를 해석하면 무작위로 응답했을 때 기대값이 완전한 일관성에서 73.1% 정도 벗어난 경우에 해당한다고 할 것이다.

한편 Saaty의 기준에 따라 CR = 0.1인 경우의 λ_{max}값은 3.116으로 K지수가 22.2%수준이다. 따라서 비일관성정도가 약 22.2% 수준이라고 할 수 있다. 이렇게 Saaty의 기준에 따른 일관성측정방법은 두 가지 측면에서 문제점이 있다고 할 수 있다. 첫째는 RI값이 지나치게 크다는 점이다. 최대고유치의 분포가 정규분포를 따르지 않기 때문에 무작위로 응답하였을 때 최대고유치가 4.16 이하가 될 확률은 50%가 아니라 73.1%이다. 따라서 RI를 계산하기 위해서는 평균값을 사용하기보다는 K지수가 50%지점이 되는 부분의 최대고유치값이 오히려 바람직하다고 할 것이다. 이 기준에 따르면 최대고유치가 약 3.4357 값이 되어야 하며 이 경우 RI값은 0.2179[8]값이 된다.

7) $(\lambda_{max}-3)/2=0.58$

8) $(3.4357-3)/(3-1)=0.2179$



[그림 2] $n=4$일 때 λ_{max}의 분포(표본크기 : 10,000)

둘째, CR의 허용기준에 대한 문제이다. 앞서 지적하였듯이 CR이 0.1인 경우 Saaty가 제시한 방법을 따른 경우 K지수값이 22.2%에 해당하기 때문에 지나치게 크다고 볼 수 있다. 좀더 응답의 일관성을 좀 더 엄격하게 분석하기 위해서 K지수를 10%[9]로 한다면 $\lambda_{max} \fallingdotseq 3.0291$에 해당하므로 $((3.0291-3)/(3-1))/0.2179 \fallingdotseq 0.067$의 값이 바람직한 CR 값이 될 것이다.

셋째, 4차원인 경우를 살펴보면 다음과 같다. $n=4$일 경우에는 앞서 지적하였듯이 모든 가능한 경우의 수가 2천4백만개를 넘어서기 때문에 개인용 컴퓨터에서 연산을 수행하기에는 지나치게 큰 편이라고 할 수 있다. 따라서 본 논문에서는 역수행렬의 각 원소값을 무작위로 부여하여 계산을 수행하였다. 반복횟수는 10,000번이며 민감도 분석을 수행하였는데, 4차원의 분포를 살펴보면 [그림 2]와 같다.

위 그림에서 확인할 수 있듯이 $n=3$일 때와 달리 $n=4$일 경우에는 일정한 분포적 특성을 파악하기 힘들다. 이러한 특성이 무작위표본에 의한 차이에 기인하거나 혹은 표본크기에 의한 차이에 기인한 것인 경우 문제가 발생할 수 있으므로 표본크기를 3만회로 하여 다시 한번 시뮬레이션을 돌려보았고, 표본크기를 30만개로 증대시켜서 분석을 수행하여보았다. 분석결과가 <표 3>, [그림 3], [그림 4]에 있다.

<표 3>, [그림 3], [그림 4]의 결과를 살펴보면 무작위표본에 따른 차이나 표본크기에 따라 분포가 달라진다고 보기 어려운 것으로 판단된다. 중간값도 표본크기가 3만개인 경우나 30만개인 경우에 각각 6.2596과 6.2535로 거의 일치하고 있으며 다른 주요 기술통계량(descriptive statistic)의 값들을 살펴보더라도 평균이나 4분위수들이 거의 일치를 하고 있음을 확인할 수 있다. 여기서는 표본의 크기가 300,000개일 때의 분포를 이용하여 분석을 수행하였으며, 그 결과가 <표 4>에 있다.

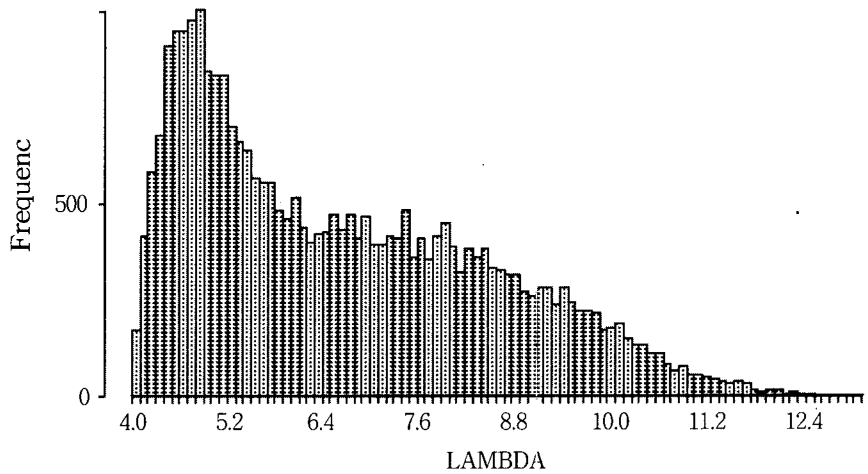
한편 Saaty는 $n=4$일 때 RI 값을 0.90으로 제시하고 있다. 이 주장에 따르면 무작위응답에 따른 평균값이 $\lambda_{max}=6.7$[10]이라는 의미가 된다. 시뮬레이션 결과를 이용하면 $\lambda_{max}=6.7$일 경우 K지수값은 약 60%에 해당하여 비일관성의 정도가 $n=3$일 때보다는 작지만 여전히 큰 수준이라고 할

9) 물론 응답의 신뢰수준을 높이기 위해서는 K지수의 값을 낮추는 방법을 활용할 수 있을 것이다. 그러나 Saaty가 제시한 CR=0.1과 비교가능하기 위해 여기서는 10% 기준을 사용하였다.

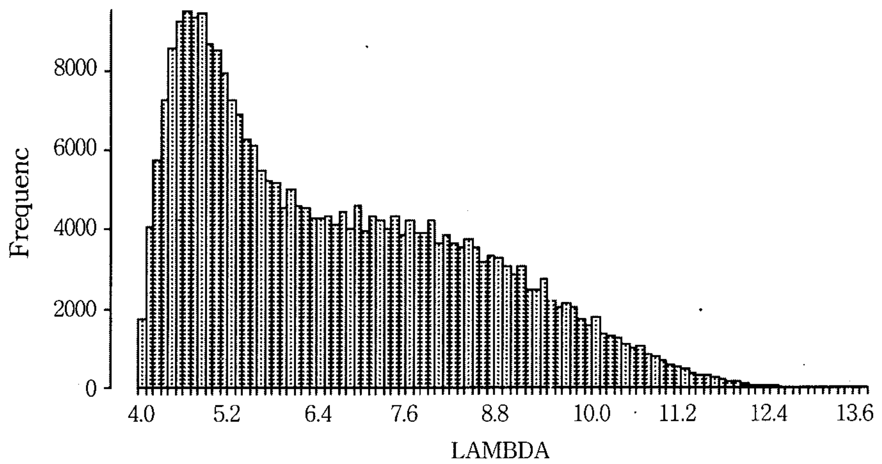
10) $(\lambda_{max}-4)/(4-1)=0.90$

〈표 3〉 $n = 4$일 때 민감도 분석수행시 기술통계량

표본크기	평 균	표준편차	최소값	최대값	Q1	Median	Q3
1만개(1)	6.6757	1.8947	4.0042	13.3703	5.0249	6.2805	8.0753
3만개(2)	6.6515	1.8885	4.0047	13.1062	5.0002	6.2596	8.0323
30만개(3)	6.6517	1.8849	4.0000	13.7518	5.0112	6.2535	8.0396



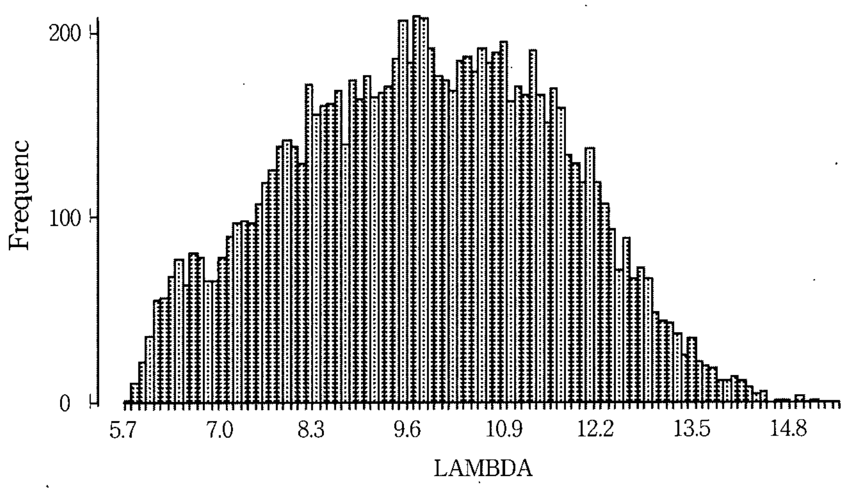
[그림 3] $n = 4$일 때 표본크기 30,000개(2)



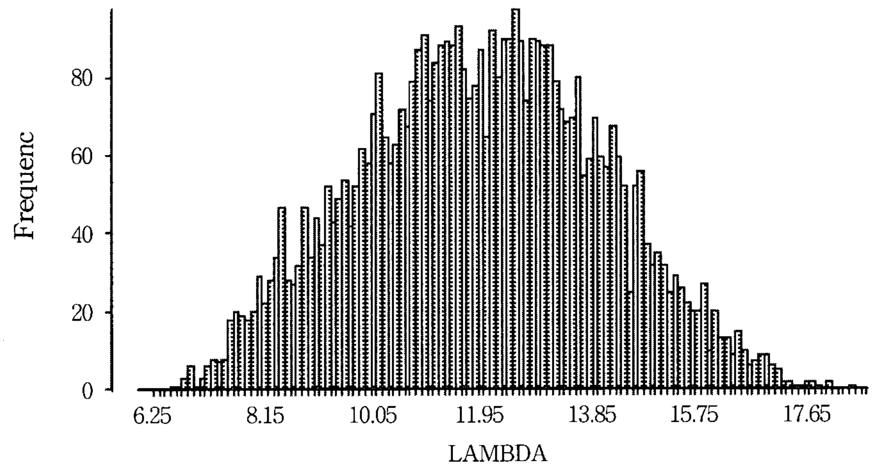
[그림 4] $n = 4$일 때 표본크기 300.000개(3)

〈표 4〉. $n = 4$이고 표본이 300,000개일 때 기술통계량

표본크기	평균	표준편차	0	1%	5%	10%	25%	50%	75%	100%
300,000	6.6517	1.8849	4.0000	4.1300	4.3469	4.5249	5.0112	6.2535	8.0396	13.7518



[그림 5] $n=5$ (표본크기 : 10,000, 구간간격 : 0.1)



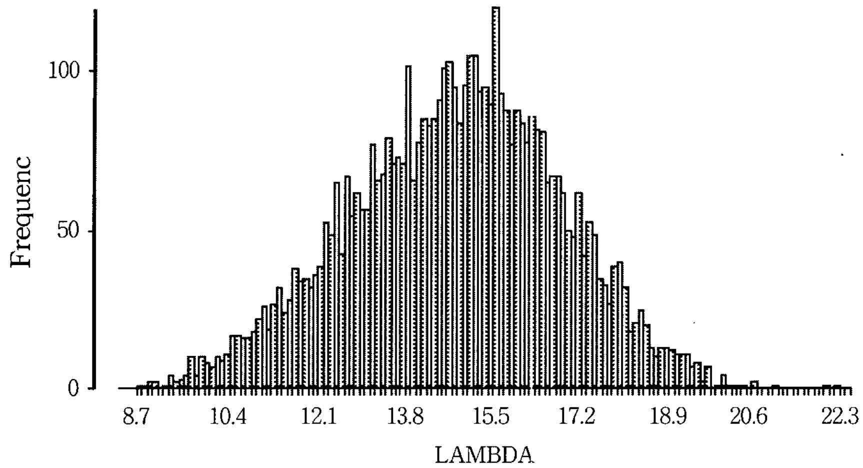
[그림 6] $n=6$ (표본크기 : 5,000, 구간간격 : 0.1)

수 있다. 따라서 무작위로 뽑았을 때의 K지수값이 50%일 때의 최대고유치 λ_{max}를 활용하는 것이 바람직하다고 할 수 있으며, 이 때 값은 약 6.2535가 된다. 이 값을 이용하는 경우 $n=4$일 때 새로운 RI 값은 0.613이 된다.

한편 Saaty의 기준에 따라 CR=0.1일 때 λ_{max} 값은 4.27[11]로 이 때의 K지수값은 약 2.5%에 해당하여 상당히 엄격함을 알 수 있다.[12] 이러한 Saaty의 기준은 지나치게 엄격한 것으로 앞의 $n=3$일 때와 같은 방법으로, K지수값이 10%일 때의 $\lambda_{max}=4.5249$를 이용하여 CI값을 구해보면 0.1750이 되

11) CI/RI=0.1이므로 Saaty는 RI를 0.9로 제시하였으므로 CI=0.09가 되며 이를 만족하는 최대고유치 값은 4.27이 된다.

12) 실제로 완벽할 일관성을 달성했을 때 중 하나인 모든 4×4 행렬의 원소의 값이 1인 경우에 최대고유치는 4의 값을 갖지만 이 중 하나의 상대각원소(upper triangle element)값을 2로 변환시키는 경우 최대고유치는 4.236이 된다. 또 3으로 변환시키는 경우에는 4.449가 되기 때문에 Saaty의 기준은 지나치게 엄격하다고 이야기할 수 있다.



[그림 7] n = 7 (표본크기 : 5,000, 구간간격 : 0.1)

〈표 5〉 n = 5,6,7일 때의 기술통계량 값

n	표본크기	평균	표준편차	0	1%	5%	10%	25%	50%	75%	100%
5	10,000	9.4092	1.8849	5.1824	5.6825	6.2340	6.6518	7.7930	9.4086	10.9091	16.0870
6	10,000	12.2486	2.0310	6.4968	7.7392	8.7583	9.5084	10.8333	12.3000	13.6959	18.5934
7	10,000	15.0207	1.9945	8.3455	10.0829	11.6331	12.3327	13.7101	15.0879	16.4095	21.9147

고 앞에서 제시한 새로운 RI = 0.613을 이용하면 CR = 0.233이 된다.

마지막으로 n=5, 6, 7인 경우의 분포를 살펴보면 [그림 5], [그림 6], [그림 7]과 같다.

위 분포의 형태들은 대칭형분포의 형태를 띄고 있어서 정규성검정을 수행하였는데, 분석결과 Kolmogrov-D 통계량들에 대한 유의확률이 모두 0.01 이하로 나와 정규분포를 따른다고 보기는 어려웠다. 각 경우별로 기술통계량들을 요약하면 <표 5>와 같다.

〈표 6〉 Saaty의 기준에 따른 무작위 추출시 λ_{max} 값 및 CR = 0.1일 때의 λ_{max}

n	무작위추출시 λ_{max} 평균값	Saaty의 RI	CR = 0.1일 때 λ_{max}
5	9.48	1.12	5.448
6	12.20	1.24	6.620
7	14.92	1.32	7.792

한편 위 결과들에 Saaty가 제시한 무작위 추출시의 λ_{max}의 평균값과 이 때의 RI 값, 그리고 CR = 0.1을 만족하는 경우의 λ_{max}값을 살펴보면 <표 6>과 같다.

예를 들어, n=5일 때 Saaty는 RI = 1.12로 제시하였고 따라서 무작위 추출을 한 역수행렬의 λ_{max}의 평균값이 9.48임을 알 수 있다. 또한 Saaty가 제시한 소망스러운 비일관성 기준인 CR=0.1 이하가 되기 위해서는 λ_{max} 값이 최소한 5.448 이하가 되어야 한다. 그러나 앞의 <표 5>에서처럼 n=5일 때 5.448일 경우는 K지수가 0%에 가깝게 된다[13]. 마찬가지로 n = 6, 7일 경우에서도 K지수의

13) 원래 0%일 때는 5가 되어야 하나 시뮬레이션이 무작위추출을 통해 이루어져 있어서 0%일 때의 값이 정확히 5가 되지는 않을 수 있다. 본 시뮬레이션에서는 λ_{max}가 5.448이 될 확률은 0.0003으로 나타났는데 이는 거의 0%에 가깝다고 할 수 있을 것이다.

〈표 7〉 K지수를 이용한 새로운 CR기준(K지수가 10%일 때)

n	λ_{max}(K지수=50%)	ri	λ_{max}(K지수=10%)	CI	새로운 CR
3	3.4357	0.2179	3.0291	0.0146	0.0668
4	6.2535	0.7512	4.5249	0.1750	0.2329
5	9.4086	1.1021	6.6518	0.4130	0.3747
6	12.3000	1.2600	9.5084	0.7017	0.5569
7	15.0879	1.3480	12.3827	0.8971	0.6655

값이 0%에 가깝기 때문에 Saaty의 CR=0.1 기준은 지나치게 엄격한 것이라고 할 수 있다.

이러한 문제점을 해결하기 위해 K지수값이 50%일 때 λ_{max}값을 RI 값으로 사용을 하고, K지수가 10%일 때의 λ_{max} 값을 CR의 임계점으로 계산을 하면 <표 7>과 같은 결과를 얻을 수 있다.

위 표에서처럼 $n=5$일 때의 CR 기준은 0.3747로써 Saaty의 CR=0.1 기준보다는 좀 더 완화된 값임을 알 수 있다. 이것은 n=6, 7인 경우도 마찬가지이다. 여기서, 유의해야 할 것은 Saaty는 λ_{max}의 산술평균값을 RI 계산에 이용하였으나 본 연구에서는 K지수값이 50%일 때, 즉 확률질량함수의 적분값이 0.5일 때의 값을 이용하여 RI를 계산하였으므로 양자간의 단순비교를 하는 것은 무리가 있다.

4. 결론 및 향후 연구 과제

전통적으로 AHP 기법은 다른 의사결정방법론에 비해 의사결정자들의 응답일관성 여부를 검증할 수 있는 CR이라는 지표를 제공한다는 점에서 그 유용성이 인정되어 왔다. 그러나 이론적으로는 쌍대비교행렬의 차원이 증가함에 따라 λ_{max}의 분포가 어떻게 변화를 하는지, 이에 따라 CI, RI, 그리고 소망스러운 CR기준이 무엇이 되어야 하는지에 대한 연구는 상대적으로 적었다. 본 연구는 이러한 이론적 공백에 대해서 다음과 같은 결과를 제시하였다.

첫째, 쌍대비교행렬의 차원 n에 따라 λ_{max}의 분포가 상이함을 보였다. 일반적으로 CI의 분포가 카이제곱 분포를 이룬다는 주장이나, 정규분포를 이룬다는 주장과 달리 n의 변화에 따라 일반화된 분포를 찾기는 어려웠으며 n=3이나 4일 경우에는 RI 계산을 위해 통계량으로 산술평균을 사용하는 것은 이론적으로 문제가 있음을 보였다[14].

둘째, 본 연구에서는 n의 변화에 따라 확률질량함수를 구하였고, 이 확률질량함수의 누적확률값인 K지수의 사용을 제안하였다. 앞서 지적하였듯이 산술평균은 정규분포가정하에서는 바람직한 통계량이지만 정규분포가정이 충족되지 않는 경우에 RI를 계산하기 위해서는 누적확률의 값이 50%가 되는 중간값 활용이 바람직할 수 있다. 또한 CR의 기준을 설정하는데 있어서도 K지수가 10%일 때의 값을 임계점을 계산하여 이를 사용하는 것이 바람직할 수 있다. 물론 K지수값이 5%나 1%일 때의 값을 사용하는 방법도 사용할 수 있으나 이것은 연구자의 일관성에 대한 엄밀성의 정도에 따라 선택할 수 있을 것이다. 즉 연구자는 K지수값을 밝혀줌

14) 본 연구에서는 제시하지 않았지만 수리적으로는 CLT (Central Limit Theorem)에 의해 최대고유치가 정규분포를 따를 수 있는데 CLT를 적용하기 위해서는 최소한 n=9 이상인 쌍대비교행렬 경우에 가능하다고 할 수 있다. 실제로 시뮬레이션의 결과에서도 n=9인 경우에는 Kolmogrov D 통계량을 이용한 경우 정규분포가정을 사용할 수 있음을 확인했다. 다만 n=5 이상인 경우에는 정규분포 가정을 사용하기 어려워도 평균과 K지수가 50%일 때의 값이 큰 차이를 보이지 않는 대칭분포의 형태를 따르고 있다.

으로써 응답일관성에 대한 통계적 엄밀성을 제공할 수 있다.

셋째, Saaty가 제시한 CR=0.1 기준이 재검토될 필요가 있음을 보였다. n=3일 경우에는 오히려 Saaty의 0.1 기준이 오히려 엄격하지 않으며 그 이외의 경우에는 Saaty의 기준이 보수적인 기준임을 보였다.

응답일관성은 인지적 오류(cognitive error)는 어느 정도 통제하지만, 동기적 오류(motivational error)도 통제하는 것은 아님을 유의해야 한다. 응답일관성이 완벽하다고 할지라도 체계적 오류(systematic error)가 존재할 수도 있기 때문이다[4]. 또한 의사결정자들이 의도적으로 사익(self-interest)을 위해 응답을 왜곡하려는 전략적 행위(strategic behavior)를 통제할 수 있는 것은 아니다. 또한 AHP기법이 전문가들을 대상으로 수행되는 경우 전문가들의 CR값은 좀더 엄격해야 한다는 사실은 충분히 예견할 수 있다. 이 경우 우리는 전문가들의 응답행렬을 이용하여 λ_{max}의 경험적 분포를 유도하는 방법을 간접적으로 이용하여 전문가들에 대한 CR기준을 새롭게 도출하는 방법을 고려할 수 있을 것이다. 이러한 문제를 해결하기 위한 방안들에 대한 연구는 추후 연구과제로 남겨두고자 한다[15].

참 고 문 헌

[1] 김성철, 어하준, "AHP 가중치 결정에서의 다수 전문가 의견종합 방법", 「한국경영과학회지」, 제19권, 제3호(1999), pp.41-51.

[2] 노화준, 「정책평가론」, 박영사, 1998.

[3] 서창교, 박정우, "정책목표와 연계한 전략적 R&D 투자재원배분 및 연구과제 선정방안연구", 「경영과학」, 제16호, 제2호(1999), pp. 61-77.

[4] 윤재곤, "AHP기법의 적용효과 및 한계점에 관한 연구", 「한국경영과학회지」, 제21권, 제3호(1996), pp.109-125.

[5] 이창효, 「다기준 의사결정론」, 세종출판사, 1999.

[6] 한국개발연구원, 「예비타당성조사 수행을 위한 다기준분석 방안 연구」, 2000.

[7] Forman. E.H., "Random Indices For Incomplete Pairwise Comparison Matrices," *European Journal of Operational Research*, Vol.48(1990), pp.153-155.

[8] Golden, B.L, and Q. Wang, "An alternative measure of consistency," in *The Analytic Hierarchy Process : Application and Studies* (eds. Golden, B.L., Wasjil, E.A. and Harker, P.T.), Springer-Verlag, (1989), pp. 68-81.

[9] Keeney, R.L. and H. Raiffa, Decisions with Multiple Objectives, Cambridge University Press, 1976.

[10] Saaty, T., *Fundamentals of Decision Making and Priority Theory with Analytic Hierarchy Process*, RWS Publications, 1994.

[11] Saaty, T., *The Analytic Hierarchy Process*, RWS Publications, 1996.

[12] Tung, Y.A., "Time Complexity and Consistency Issues in Using the AHP for Making Group Decisions," *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis,* Vol.7(1998), pp.144-154.

[13] Vargas, L.G., "Reciprocal Matrices with Random Coefficients," *Mathematical Modeling,* Vol.3(1982), pp.69-81.

15) 각 계층의 dimension에 따른 영향을 CR에 반영하는 연구는 경험적 수준에서의 연구와 시뮬레이션을 통한 연구를 통해 동시에 진행되어야 할 것으로 판단된다. 시뮬레이션을 통한 연구는 AHP가 9점 스케일과 역수행렬의 형태를 띤다는 점에서 일반화된 이론적 확률분포함수를 찾기 어려운 점 때문에 더 유용하다고 할 수 있다.